

Bien public environnemental, quelle gestion?

B. Elyakime*, P. Loisel†

14 mars 2003

Après avoir rappelé ce qu'est un contrat incitatif, incitatif pour faire révéler les spécificités du contractant au faiseur du contrat ou incitatif pour obtenir l'usage d'une certaine pratique par le contractant, nous centrons notre démarche sur le second contrat dit incitatif sur les actions. Nous le supposons appliqué à un groupe d'agriculteurs producteurs d'une externalité positive perçue comme un bien public que souhaite rémunérer la société. Nous étudions ensuite les avantages, les inconvénients et les conditions liés à l'usage d'un tel contrat sur les actions pour un collectif d'agriculteurs contractants. Dans une dernière section un exemple de ce contrat incitatif sur les actions est étudié, en cas d'un unique contractant puis de deux contractants regroupés dans une organisation afin de produire un bien public quelconque.

Mots clés : Risque moral, bien public.

Classification JEL : D8, H4.

*Institut National de la Recherche Agronomique (INRA), Economie et Sociologie Rurales (ESR), Emploi, Territoire, Innovation, Compétence(ETIC), Toulouse

†Institut National de la Recherche Agronomique (INRA), Biométrie, Laboratoire Analyse des Systèmes et Biométrie, L.A.S.B., Montpellier

Si l'agriculture intensive génère une production abondante à moindre coût, cette production s'accompagne le plus souvent d'externalités négatives.

Ainsi, les producteurs de porcs de Bretagne polluent les nappes phréatiques en déversant trop de lisiers sur les champs par exemple, les céréaliers de la Beauce font de même en utilisant trop intensément les engrais et pesticides sur leurs champs, les agriculteurs du Pays de Caux engendrent une pollution des nappes de leur région en laissant nus leurs champs au moment des pluies d'hivers qui font partir la terre vers les nappes.

Généralement, c'est un collectif d'agriculteurs, ceux d'un même bassin versant, qui sont concernés et qui sont en situation de produire, et de recevoir également, de telles externalités. En effet l'agriculteur seul sur sa parcelle n'est plus isolé de son voisin à cette échelle géographique : sa parcelle est en interaction avec celles en amont, en aval ou avec celles qui jouxtent latéralement la sienne car les écoulements des eaux de ruissellement qui sont les supports des externalités négatives, proviennent et se dirigent vers toutes les autres parcelles agricoles que la sienne, en transitant par la sienne éventuellement.

Si la régulation de ces externalités est difficile à mettre en place dans le cadre des pratiques agricoles observées aujourd'hui, nombre d'acteurs de la politique agricole proposent alors une modification de ces pratiques agricoles. A la place des pratiques agricoles non respectueuses de l'environnement, les agriculteurs en utiliseraient d'autres plus respectueuses de l'environnement que les précédentes. Ils apprendraient d'autres pratiques qu'il conviendrait d'abord de créer puis d'apprendre aux agriculteurs : il y aurait donc création et apprentissage d'un nouveau savoir faire respectueux de l'environnement : la norme de production agricole environnementale.

L'application de la norme par le collectif d'agriculteurs d'un bassin versant peut alors engendrer une rémunération si son application permet l'obtention d'une externalité positive à caractère de bien public pour la société et jointe à la production agricole environnementale c'est-à-dire respectueuse de l'environnement. Ce bien public est alors généralement localisé car sa production et éventuellement sa consommation concernent un collectif localisé d'agriculteurs et de consommateurs. La production d'un paysage par un collectif d'agriculteurs est un exemple de tel bien public comme aussi un maintien d'un patrimoine localisé sous forme d'une biodiversité qui du coup pourra être transmis aux générations futures sans avoir été dégradé.

Une telle rémunération n'est cependant pas simple à mettre en œuvre puisque chaque agriculteur est en interaction avec un autre et que donc la production d'un agriculteur dépend de celle des autres : si un ou plusieurs n'agissent pas ou n'agissent pas correctement le bien public environnemental ne sera pas produit.

Or le contrat dit incitatif paraît adapté à la mise en œuvre de ces nouvelles pratiques puisqu'il propose aux contractants une rémunération adaptée au niveau de production environnementale

et donc au choix éventuellement collectif des actions par le ou les agriculteurs. Qu'en est-il ?

Afin de répondre à cette question, nous rappelons ce qu'est un contrat incitatif, incitatif sur la révélation des caractéristiques du contractant ou incitatif pour l'usage d'une certaine pratique par le contractant. Puis, afin de centrer notre démarche sur le contrat incitatif sur les actions, nous étudions les avantages, les inconvénients et les conditions liés à l'usage d'un tel contrat sur les actions pour un collectif d'agriculteurs contractants. Les conditions de suivi des contractants sont également précisées. Dans une dernière section un exemple de ce contrat incitatif sur les actions est étudié, en cas d'un unique contractant puis de deux contractants regroupés dans une organisation afin de produire un bien public quelconque.

1 Cararactérisations du contrat incitatif sur les actions

Si un contrat lie deux agents entre eux afin de réaliser un certain objectif, les conditions du contrat sont assez souvent précisées au contractant à travers un cahier des charges que ce dernier devra respecter sous réserve de contrôles réalisés par un tiers.

L'incitation dans un contrat dit incitatif concerne donc soit le niveau de production soit le choix de l'action par le contractant.

Le contrat incitatif sur le niveau de production de biens prend en compte des informations privées sur des paramètres (de performance, par exemple) du ou de chacun des producteurs dans le calcul du niveau de production. Le performant (ou le non performant) est incité à prendre le niveau de production qui lui correspond et pas un autre : le contrat est construit de telle manière que le contractant ne peut prendre que la tarification qui lui correspond. On parle alors de tarification non linéaire puisque le transfert financier qui sera réalisé ne sera pas proportionnel à la production.

L'incitation au choix de l'action considérée comme avantageuse par le faiseur du contrat incitatif est réalisée compte tenu donc de l'usage d'une certaine action par le contractant pour l'obtention des résultats observés et compte tenu aussi des différents états de la nature qui peuvent influencer les résultats. Le paiement du contractant se fait alors en fonction des résultats observés, sachant que ces résultats varient selon les actions entreprises et selon les différents états de la nature qui influencent les résultats. Dans la mesure où l'entreprise réalise son contrat incitatif, elle le fait de manière optimale pour le contractant et pour le principal car le contrat a été prévu ainsi.

Or l'application de certaines actions agricoles favorables à la société sur le plan environnemental passe par l'application d'une norme de production agricole respectueuse de l'environnement qui assure les bons choix individuels des agriculteurs, la bonne organisation entre les agriculteurs.

Nous considérons alors des agriculteurs supposés regroupés dans une organisation afin de produire un bien agricole selon une norme de production agricole respectueuse de l'environnement et génératrice d'une externalité positive. Ces agriculteurs sont en situation d'interdépendance dans un bassin versant au sens que si l'un d'entre eux ne fait rien, l'externalité positive n'est pas conséquente. Les agriculteurs cherchent donc à gérer collectivement, gestion supposée sur une année, cette externalité jointe positive vue comme un bien public que la société rémunère donc à chacun des membres du collectif d'agriculteurs.

Or si le contrat incitatif suppose une fonction de coût différenciée par agriculteur et connue d'eux, certains peuvent ne pas avoir une caractéristique relationnelle avec leurs voisins identique aux autres : certains peuvent promouvoir des actions communes sur le plan environnemental, d'autres peuvent envisager des actions plus individuelles et d'autres encore aucune relation de ce type. Cette dimension intervient de manière évidente dans la résolution de la coordination des agriculteurs sur un objectif commun. Ceux qui ne cherchent pas à agir collectivement alors que leur présence est essentielle ont en quelque sorte le monopole de leur relation de voisinage avec les autres agriculteurs du bassin versant.

Face à ce monopole le principal impose une collection d'actions donnée par le contrat incitatif, chaque agriculteur en recevant une dans une relation avec les actions des autres. Si une ou plusieurs de ces actions sont préférables globalement et éventuellement dans un esprit coopératif, il en est tenu compte dans le contrat incitatif par le choix de la bonne collection d'actions pour la société.

Ce contrat incitatif n'empêchera cependant pas l'existence d'une organisation chargée de contrôler le niveau de production global du collectif des agriculteurs afin de les rémunérer pour leurs actions. En effet, l'observation des résultats des actions des agriculteurs nécessite cette organisation minimale des agriculteurs qui n'existe pas *a priori*.

De plus, on peut se demander l'intérêt d'introduire l'hypothèse, sous-jacente à ce type de contrat, de non visibilité des actions des agriculteurs par le principal alors que précisément ces actions sont en réalité visibles : présence d'équipements spécifiques comme des bandes enherbées ou des haies, alternance de cultures, travail spécifique des sols. Si elles sont certes généralement visibles, leur bon niveau, leur bonne localisation et leur bonne coordination ne le sont pas nécessairement tandis qu'ils seront assurés dans un contrat incitatif.

Enfin, l'organisation du contrôle est nécessairement plus aisée et moins coûteuse à réaliser dans un contrat incitatif par rapport à un contrat classique, puisque seul le résultat est à contrôler dans un contrat incitatif sur les actions.

2 Quelles conditions d'usage du contrat sur les actions ?

La compétence d'un agent pour la réalisation d'un objectif est primordiale. Le savoir-faire individuel sur un projet individuel est cependant à distinguer de celui collectif sur un projet collectif qui est tout aussi basique. L'agriculteur, unique contractant, est donc supposé connaître les actions préconisées par le contrat. Si par contre plusieurs contractants sont regroupés afin de réaliser un objectif collectif quelconque, la seule compétence individuelle ne suffit plus puisque chaque agriculteur est alors en relation avec d'autres du même contrat et que donc la compétence de chaque agriculteur devra être mise en valeur dans un tissu de relations. Ceci ne pourra se faire que si chacun sait gérer ces relations et sait s'insérer dans le collectif afin de répondre à l'objectif collectif. Cette dimension nouvelle de la compétence de chacun est tout aussi nécessaire que la précédente et ces deux formes de compétence sont supposées en définitive exister chez chacun des contractants d'un contrat dit incitatif sur les actions.

Les agriculteurs du collectif sont de plus supposés conscients de la nécessité d'agir positivement sur l'environnement et que cette action doit être collective. Chacun est alors capable d'appliquer les actions nécessaires qu'il connaît par ailleurs pour en calculer coûts et avantages. Aucun ne cherche donc à convaincre l'autre de ne rien faire ou de faire une action non conforme et tous agissent. Les actions possibles à entreprendre sont toutes indiquées par l'organisme. Cependant, comme les agriculteurs concernés par des actions environnementales sont ceux qui font nécessairement partie d'un même ensemble géographique et (ou) environnemental, tous ces agriculteurs de ce même ensemble doivent être adhérents à l'organisme pour produire le bien environnemental en question .

Si donc un regroupement des agriculteurs dans un organisme paraît nécessaire au bon fonctionnement d'un contrat incitatif sur les actions, toute organisation quelconque convient-elle pour autant ?

Chacun des membres d'un tel organisme aura conscience de la nécessité de son action dans un collectif où chacun interagit avec l'autre et donc est contrôlé par l'autre afin d'atteindre un certain but.

Il y a donc nécessité d'une organisation des agriculteurs qui engendrera une acceptabilité plus forte qu'avec une autre organisation des actions de chacun, de leur ordonnancement les unes par rapport aux autres et en définitive de leur auto-contrôle par chaque membre du collectif.

Cette organisation de regroupement d'agriculteurs désireux d'agir sur le plan environnemental constitue en réalité une forme institutionnalisée permettant la mise en œuvre d'une incitation des agriculteurs à agir et à choisir les bonnes actions vis-à-vis de l'environnement.

Le contrat dit incitatif est alors utilisé comme moyen d'assurer correctement le choix des actions et le paiement associé des uns et des autres, en tenant compte des actions de chacun, en considérant le résultat global des actions coordonnées de tous et en assurant un contrôle simple sur le résultat global.

Le contrat dans le contexte organisationnel ainsi défini est en définitive la concrétisation d'un savoir faire individuel et collectif. Il est la cristallisation d'une organisation auto-incitative entre les participants pour produire un bien environnemental.

3 Un exemple de contrat sur les actions

Nous étudions successivement le cas d'un seul agent agriculteur en situation d'information complète et incomplète du principal faiseur du contrat sur les actions de l'agent supposées repérables en continu puis de deux agents agriculteurs en considérant seulement la situation d'information incomplète. L'utilité sociale considérée correspondra à une fonction utilitariste.

4 Contrat incitatif sur les actions pour un bien public

4.1 En information complète avec un seul agent

$$\max_{a, t(\cdot)} \int_x [G(x - (1 + \gamma)t(x)) + u(t(x)) - w(a)] dF(x, a)$$

sous les contraintes :

$$\int_x G(x - (1 + \gamma)t(x)) dF(x, a) \geq E_0$$

$$\int_x (u(t(x)) - w(a)) dF(x, a) \geq E$$

Les conditions nécessaires du premier ordre s'écrivent alors :

$$(1 + \gamma)(1 + \lambda_0) \frac{G'(x - (1 + \gamma)t(x))}{u'(t(x))} = \lambda + 1$$

$$\lambda_0 \cdot \left(\int_x G(x - (1 + \gamma)t(x)) dF(x, a) - E_0 \right) = 0, \quad \lambda_0 \geq 0$$

$$\lambda \cdot \left(\int_x (u(t(x)) - w(a)) dF(x, a) - E \right) = 0, \quad \lambda \geq 0$$

$$(1 + \lambda_0) \int_x G(x - (1 + \gamma)t(x)) dF_a(x, a) + (1 + \lambda) \left(\int_x (u(t(x))) dF_a(x, a) - w'(a) \right) = 0$$

En prenant une fonction d'utilité identité pour les consommateurs et en en considérant une particulière pour le contractant, soit $u(t) = 2\sqrt{t}$, nous calculons le transfert financier associé au contrat ainsi que l'utilité de l'agent, soit $t(x) = \left[\frac{\lambda + 1}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)} \right]^2$, $u(t(x)) = 2 \frac{\lambda + 1}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)}$.

Si nous écrivons $\alpha = \frac{\lambda + 1}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)}$, alors nous avons : $\int_x u(t(x)) dF(x) = 2\alpha$ et $\int_x u(t(x)) dF_a(x) = 2\alpha \int_x dF_a(x) = 0$.

4.2 En information incomplète avec un seul agent

Le programme du faiseur du contrat s'écrit en maximisant l'utilité sociale, sous contraintes qu'elle soit au moins égale à un certain niveau ainsi que celle de l'agent qui doit en outre être maximisée par rapport à l'action recherchée.

On a donc :

$$\max_{a, t(\cdot)} \int_x [G(x - (1 + \gamma)t(x)) + u(t(x)) - w(a)] dF(x, a)$$

sous les contraintes :

$$\int_x G(x - (1 + \gamma)t(x)) dF(x, a) \geq E_0$$

$$\int_x (u(t(x)) - w(a)) dF(x, a) \geq E$$

$$\max_a \int_x (u(t(x)) - w(a)) dF(x, a)$$

Sous l'hypothèse qu'un accroissement de a produit une amélioration de x au sens de la dominance stochastique du premier ordre, ou $F_a(x, a) \leq 0^1$, la condition nécessaire du premier ordre pour l'agent est $\int_x u(t(x)) dF_a(x, a) = w'(a)$ tandis que celles relatives à l'utilité sociale s'écrivent :

$$(1 + \gamma)(1 + \lambda_0) \frac{G'(x - (1 + \gamma)t(x))}{u'(t(x))} = \lambda + 1 + \mu \frac{F'_a}{F'}(x, a)$$

¹avec une inégalité stricte pour un ensemble de probabilités positives. De plus, la fonction $\frac{F'_a}{F'}$ est supposée croissante par rapport à x .

$$\lambda_0 \cdot \left(\int_x G(x - (1 + \gamma)t(x)) dF(x, a) - E_0 \right) = 0, \quad \lambda_0 \geq 0$$

$$\lambda \cdot \left(\int_x (u(t(x)) - w(a)) dF(x, a) - E \right) = 0, \quad \lambda \geq 0$$

$$(1 + \lambda_0) \int_x G(x - (1 + \gamma)t(x)) dF_a(x, a) + \mu \left[\int_x u(t(x)) dF_{aa}(x, a) - w''(a) \right] = 0$$

En cas d'information incomplète sur les actions et par rapport à la situation d'information complète, le faiseur du contrat incite l'agent à faire les actions désirées, au prix cependant d'une prise de risque par cet agent, le coefficient μ étant strictement positif (Hölmstrom, 1979, Shavell, 1979).

En prenant une fonction d'utilité identité pour les consommateurs et en considérant une fonction d'utilité particulière pour l'agent agriculteur, $u(t) = 2\sqrt{t}$, on obtient $t(x) = \left[\frac{\lambda + 1 + \mu \frac{f_a}{f}(x, a)}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)} \right]^2$ et $u(t(x)) = 2 \frac{\lambda + 1 + \mu \frac{f_a}{f}(x, a)}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)}$.

Si nous notons $\alpha = \frac{\lambda + 1}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)}$, alors nous avons $\int_x u(t(x)) dF(x) = 2\alpha$.

4.3 En information incomplète avec deux agents

Le programme s'écrit selon la même logique en considérant néanmoins les deux agents éventuellement différents.

On a donc :

$$\max_{a_1, a_2, t_1(\cdot), t_2(\cdot)} \int_x [G(x - (1 + \gamma)(t_1(x) + t_2(x))) + u_1(t_1(x)) - w_1(a_1) + u_2(t_2(x)) - w_2(a_2)] dF(x, a_1, a_2)$$

sous les contraintes :

$$\int_x G(x - (1 + \gamma)(t_1(x) + t_2(x))) dF(x, a_1, a_2) \geq E_0$$

$$\int_x (u_i(t_i(x)) - w_i(a_i)) dF(x, a_1, a_2) \geq E_i$$

$$\max_{a_i} \int_x (u_i(t_i(x)) - w_i(a_i)) dF(x, a_1, a_2)$$

Sous l'hypothèse qu'un accroissement de a produit une amélioration de x au sens de la dominance stochastique du premier ordre, soit $F_{a_i}(x, a_1, a_2) \leq 0^2$, les conditions nécessaires du premier ordre pour les agents sont $\int_x u_i(t_i(x))dF_{a_i}(x, a_1, a_2) = w'_i(a_i)$ tandis que celles des agents s'écrivent :

$$(1 + \gamma)(1 + \lambda_0) \frac{G'(x - (1 + \gamma)(t_1(x) + t_2(x)))}{u'_i(t_i(x))} = \lambda_i + 1 + \mu_i \frac{F'_{a_i}}{F'}(x, a_1, a_2)$$

$$\lambda_0 \cdot \left(\int_x G(x - (1 + \gamma)(t_1(x) + t_2(x)))dF(x, a_1, a_2) - E_0 \right) = 0, \quad \lambda_0 \geq 0$$

$$\lambda_i \cdot \left(\int_x (u_i(t_i(x)) - w_i(a_i))dF(x, a_1, a_2) - E_i \right) = 0, \quad \lambda_i \geq 0$$

$$\int_x [G(x - (1 + \gamma)(t_1(x) + t_2(x))) + (\lambda_j + 1)u_j(t_j(x))]dF_{a_i}(x, a_1, a_2)$$

$$+ \mu_i \left[\int_x u_i(t_i(x))dF_{a_i, a_i}(x, a_1, a_2) - w''_i(a_i) \right] + \mu_j \int_x u_j(t_j(x))dF_{a_j, a_i}(x, a_1, a_2) = 0$$

En prenant les mêmes conventions que précédemment pour les fonctions d'utilité $G(\cdot)$ et $u_i(\cdot)$, nous obtenons :

$$t_i(x) = \left[\frac{\lambda_i + 1 + \mu_i \frac{f_{a_i}}{f}(x, a_1, a_2)}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)} \right]^2 \text{ et } u_i(t_i(x)) = 2 \frac{\lambda_i + 1 + \mu_i \frac{f_{a_i}}{f}(x, a_1, a_2)}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)}.$$

En notant $\alpha_i = \frac{\lambda_i + 1}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)}$, nous obtenons $\int_x u(t_i(x))dF(x) = 2\alpha_i$.

Dans le cas $G(\cdot) = I(\cdot)$, le faiseur du contrat incite l'agent à faire les actions désirées, au prix cependant d'une prise de risque par cet agent, les coefficients μ étant strictement positifs. Ceci provient d'un découplage des deux premières conditions nécessaires de dérivation par rapport aux fonctions de transfert t_i .

En cas de deux agents identiques, le modèle précédent se simplifie en considérant $u_1(t) = u_2(t) = u(t) = 2\sqrt{t}$. Il est donné en annexe 3.

5 Conclusions

Si le contrat incitatif est donc calculable théoriquement, nous constatons que ce calcul se fait au cas par cas puisqu'il faut spécifier les divers paramètres du modèle qui peuvent alors refléter des situations différentes.

²avec une inégalité stricte pour un ensemble de probabilités positives. De plus, la fonction $\frac{f_a}{f}$ est supposée croissante par rapport à x .

En particulier le passage d'un agent agriculteur à deux est possible, bien que relativement complexe puisque le nombre de paramètres du modèle s'accroît sensiblement.

De plus, considérer que les deux agents agriculteurs sont identiques peut se faire de diverses façons : si leur paramètre de coût peut être identique, les deux agriculteurs peuvent encore se différencier selon un autre paramètre relatif à leur positionnement l'un par rapport à l'autre par exemple.

L'usage d'un tel contrat apparaît donc possible mais cependant délicat car il suppose une information forte sur le résultat des actions entreprises par les agents agriculteurs, sous forme d'une loi de probabilité indexée par les actions³. C'est en effet une information difficile à obtenir mais qui cependant est en construction partielle dans quelques cas : maintien ou création d'une biodiversité sur un territoire rural composé de petites forêts fragmentées dans un ensemble agricole.

De plus, les actions doivent évidemment être connues des contractants, ce qui n'est pas nécessairement le cas en matière environnementale.

Il convient enfin de souligner à nouveau que l'usage de ce contrat suppose tout de même une organisation minimale afin de contrôler le résultat des actions des agriculteurs et donc de leur assurer le paiement correspondant. Il suppose aussi que les contractants acceptent un paiement aléatoire en contrepartie de leurs actions environnementales.

Si de plus, le faiseur du contrat n'a pas pu intégrer toutes les actions possibles et imaginables par les agents contractants, l'incitation de ce contrat disparaît. Elle n'agit plus également si les contractants ne sont pas aussi bon calculateurs que le laisse supposer le contrat. Elle peut cependant être relayée par celle issue de l'organisation qui regroupe nécessairement les agriculteurs producteurs collectifs de l'externalité positive.

6 Bibliographie

S. Grossman and O. Hart, (1983), "An Analysis of the Principal-Agent Problem", *Econometrica*, vol. 51, 1, 7-45.

B. Holmström, (1979), "Moral Hazard and Observability", *The Bell Journal of Economics*, 10, 74-91.

B. Jullien, B. Salanié and F. Salanié, 1999, "Should More Risk-Averse Agents Exert More Effort ?", *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 24 : 19-28.

³Le support de cette loi est supposé ne pas dépendre de l'action afin de respecter l'hypothèse de non observabilité de l'action par le principal.

JJ. Laffont, (1991), "Economie de l'incertain et de l'information", *Economica*, 306p.

D. Mookherjee, (1984), "Optimal Incentive Schemes with Many Agents", *Review of Economic Studies*, LI, 433-446.

S. Shavell, (1979), "Risk Sharing and Incentives in the Principal and Agent Relationship", *The Bell Journal of Economics*, 10, 1, 55-73.

Annexes

Annexe 1 : Avec un seul agent

Nous prenons une densité de probabilité Weibull $F(x, a) = 1 - e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{a})^2}$.

On note $H(y) = 1 - e^{-\frac{1}{2}y^2}$, $h(y) = ye^{-\frac{1}{2}y^2}$, $yh'(y) = (1 - y^2)h(y)$

De plus, en écrivant $x_a = \frac{x}{a}$ alors $F(x) = H(x_a)$, $f(x) = \frac{1}{a}h(x_a)$

$$\frac{f_a}{f}(x) = \frac{x_a^2 - 2}{a}, \quad \frac{f_{aa}}{f}(x) = \frac{(x_a^2 - 1)(x_a^2 - 6)}{a^2}$$

En information complète

$$\int_x G(x - (1 + \gamma)t(x))dF(x) = \int_{x_a} (ax_a - (1 + \gamma)\alpha^2)dH(x_a) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}a - (1 + \gamma)\alpha^2$$

$$\int_x G(x - (1 + \gamma)t(x))dF_a(x) = \int_{x_a} (x_a - \frac{1 + \gamma}{a}\alpha^2)(x_a^2 - 2)dH(x_a) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

Les conditions deviennent :

$$(1 + \lambda_0)\frac{\sqrt{2\pi}}{2} - (1 + \lambda)w'(a) = 0$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}a - (1 + \gamma)\alpha^2 \geq E_0, \quad \lambda_0(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}a - (1 + \gamma)\alpha^2 - E_0) = 0$$

$$2\alpha - w(a) \geq E, \quad \lambda(2\alpha - w(a) - E) = 0$$

En information incomplète

$$\text{On a } t(x) = \left[\frac{\lambda + 1 + \frac{\mu}{a}(x_a^2 - 2)}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)} \right]^2$$

$$\text{De } \int_x u(t(x))dF_a(x) = 2 \int_{x_a} \frac{\lambda + 1 + \mu \frac{x_a^2 - 2}{a}}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)} \frac{x_a^2 - 2}{a} dH(x_a) = w'(a) \text{ on déduit } \mu = \frac{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)}{8} a^2 w'(a)$$

$$\text{Si on note } \beta = \frac{a}{8} w'(a) \text{ on a } t(x) = (\alpha + \beta(x_a^2 - 2))^2$$

$$\int_x G(x - (1 + \gamma)t(x))dF_a(x) = \int_{x_a} (x_a - \frac{1 + \gamma}{a}(\alpha + \beta(x_a^2 - 2))^2)(x_a^2 - 2)dH(x_a) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} - 8\frac{1 + \gamma}{a}(\alpha\beta + 2\beta^2)$$

$$\int_x u(t(x))dF_{aa}(x) = 2 \int_{x_a} (\alpha + \beta(x_a^2 - 2)) \frac{(x_a^2 - 1)(x_a^2 - 6)}{a^2} = dH(x_a) = 8 \frac{\beta}{a^2}$$

Les conditions deviennent :

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2} - 8 \frac{1 + \gamma}{a} (\alpha\beta + 2\beta^2) + \mu(8 \frac{\beta}{a^2} - w''(a)) = 0$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2} a - (1 + \gamma)(\alpha^2 + 4\beta^2) \geq E_0, \quad \lambda_0(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} a - (1 + \gamma)(\alpha^2 + 4\beta^2) - E_0) = 0$$

$$2\alpha - w(a) \geq E, \quad \lambda(2\alpha - w(a) - E) = 0$$

$$\text{où : } \mu = \frac{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)}{8} a^2 w'(a), \alpha = \frac{\lambda + 1}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)}, \beta = \frac{a}{8} w'(a)$$

Annexe 2 : Avec deux agents différents et en situation d'information incomplète

Nous prenons une densité de probabilité Weibull $F(x, a_1, a_2) = 1 - e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{q.a})^2}$ et une combinaison linéaire des actions a_1, a_2 , sous la forme $q.a = q_1 a_1 + q_2 a_2$.

En notant $H(y) = 1 - e^{-\frac{1}{2}y^2}$, nous avons successivement $h(y) = ye^{-\frac{1}{2}y^2}$ et $yh'(y) = (1 - y^2)h(y)$.

De plus, en écrivant $x_a = \frac{x}{q.a}$, alors nous avons $F(x) = H(x_a)$, $f(x) = \frac{1}{q.a}h(x_a)$, $\frac{f_{a_i}}{f}(x) = q_i \frac{x_a^2 - 2}{q.a}$,

$$\frac{f_{a_i a_i}}{f}(x) = q_i^2 \frac{(x_a^2 - 1)(x_a^2 - 6)}{q.a^2}, \quad \frac{f_{a_j a_i}}{f}(x) = q_i q_j \frac{(x_a^2 - 1)(x_a^2 - 6)}{q.a^2}$$

$$F(x, a_1, a_2) = 1 - e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{q.a})^2}, \quad q.a = q_1 a_1 + q_2 a_2. \quad H(y) = 1 - e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad h(y) = ye^{-\frac{1}{2}y^2}$$

On note $x_a = \frac{x}{q.a}$, alors $F(x) = H(x_a)$, $f(x) = \frac{1}{q.a}h(x_a)$, $\frac{f_{a_i}}{f}(x) = q_i \frac{x_a^2 - 2}{q.a}$,

$$\text{On a } t_i(x) = \left[\frac{\lambda_i + 1 + \mu_i q_i \frac{x_a^2 - 2}{q.a}}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)} \right]^2$$

$$\int_x u_i(t_i(x)) dF_{a_i}(x) = 2 \int_{x_a} \frac{\lambda_i + 1 + \mu_i q_i \frac{x_a^2 - 2}{q.a}}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)} q_i \frac{x_a^2 - 2}{q.a} dH(x_a) = w'_i(a_i) \text{ d'où } \mu_i = \frac{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0) q.a^2}{8} \frac{w'_i(a_i)}{q_i^2}$$

Si on note $\beta_i = \frac{q.a}{8q_i} w'_i(a_i)$ on a $t_i(x) = (\alpha_i + \beta_i(x_a^2 - 2))^2$

$$\int_x G(x - (1 + \gamma)(t_1(x) + t_2(x))) dF_{a_i}(x) = \frac{q_i \sqrt{2\pi}}{2} - 8 \frac{q_i}{q.a} (1 + \gamma)(\alpha\beta + 2\beta^2)$$

$$\int_x u_j(t_j(x)) dF_{a_i}(x) = \frac{q_i}{q_j} w'_j(a_j), \quad \int_x u_i(t_i(x)) dF_{a_i a_i}(x) = 8 \frac{q_i^2}{q.a^2} \beta_i, \quad \int_x u_j(t_j(x)) dF_{a_i a_i}(x) = 8 \frac{q_i q_j}{q.a^2} \beta_j$$

Les conditions deviennent :

$$\frac{q_i}{2} \sqrt{2\pi} - 8 \frac{q_i}{q.a} (1 + \gamma)(\alpha\beta + 2\beta^2) + (\lambda_j + 1) \frac{q_i}{q_j} w'_j(a_j) + \mu_i (8 \frac{q_i^2}{q.a^2} \beta_i - w''_i(a_i)) + \mu_j \frac{8q_i q_j}{q.a^2} \beta_j = 0$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2} q.a - (1 + \gamma)(\alpha^2 + 4\beta^2) \geq E_0, \quad \lambda_0 \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} q.a - (1 + \gamma)(\alpha^2 + 4\beta^2) - E_0 \right) = 0$$

$$2\alpha_i - w_i(a_i) \geq E_i, \quad \lambda_i (2\alpha_i - w_i(a_i) - E_i) = 0$$

$$\text{où : } \mu_i = \frac{q \cdot a^2}{q_i^2} \frac{1 + \gamma}{8} w'_i(a_i), \alpha_i = \frac{\lambda_i + 1}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)}, \beta_i = \frac{q \cdot a}{8q_i} w'_i(a_i)$$

Annexe 3 : Avec deux agents identiques et en situation d'information incomplète

Nous prenons successivement :

$$G(x) = x, u(t) = 2\sqrt{t}$$

$$F(x, a_1, a_2) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{q \cdot a}\right)^2}, q \cdot a = a_1 + a_2$$

Les conditions deviennent :

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2} - 8\frac{1+\gamma}{a}(\alpha\beta + 2\beta^2) + (\lambda + 1)w'(a) + \mu\left(4\frac{\beta}{a^2} - w''(a)\right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}a - (1 + \gamma)(\alpha^2 + 4\beta^2) \geq E_0, \quad \lambda_0\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}a - (1 + \gamma)(\alpha^2 + 4\beta^2) - E_0\right) = 0$$

$$2\alpha - w(a) \geq E, \quad \lambda(2\alpha - w(a) - E) = 0$$

$$\text{où : } \mu = \frac{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)}{2}a^2w'(a), \alpha = \frac{\lambda + 1}{(1 + \gamma)(1 + \lambda_0)}, \beta = \frac{a}{4}w'(a)$$